

# Guía de Autoaprendizaje: Función Exponencial

## Introducción y Objetivos

### ¿Qué aprenderás?

Al completar esta guía serás capaz de:

- Comprender qué es una función exponencial y sus características
- Identificar y graficar funciones exponenciales
- Resolver ecuaciones exponenciales básicas
- Aplicar funciones exponenciales en problemas de la vida real
- Trabajar con logaritmos como función inversa

**Tiempo estimado: 8-10 horas de estudio**

---

## Módulo 1: Conceptos Fundamentales

### 1.1 Definición

Una **función exponencial** tiene la forma:

$$f(x) = a^x$$

Donde:

- $a$  es la base ( $a > 0$  y  $a \neq 1$ )
- $x$  es el exponente (variable independiente)

### 1.2 Ejemplos básicos

- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = 3^x$
- $f(x) = (1/2)^x$
- $f(x) = 10^x$

### 1.3 La función exponencial natural

La más importante es  $f(x) = e^x$ , donde  $e \approx 2.718281828...$

## ✓ Autoevaluación Módulo 1

1. ¿Cuáles de estas son funciones exponenciales?
    - a)  $f(x) = x^2$
    - b)  $f(x) = 2^x$
    - c)  $f(x) = x^3$
    - d)  $f(x) = (1/3)^x$
  2. ¿Por qué la base no puede ser 1 o negativa?
- 

## 📐 Módulo 2: Propiedades y Características

### 2.1 Propiedades de los exponentes

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m / a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$  (para  $a \neq 0$ )
- $a^{-n} = 1/a^n$

### 2.2 Características de $f(x) = a^x$

**Cuando  $a > 1$  (función creciente):**

- Dominio: todos los números reales  $(-\infty, +\infty)$
- Rango: números reales positivos  $(0, +\infty)$
- Pasa por el punto  $(0, 1)$
- Tiene asíntota horizontal en  $y = 0$
- Es estrictamente creciente

**Cuando  $0 < a < 1$  (función decreciente):**

- Dominio: todos los números reales  $(-\infty, +\infty)$
- Rango: números reales positivos  $(0, +\infty)$
- Pasa por el punto  $(0, 1)$
- Tiene asíntota horizontal en  $y = 0$
- Es estrictamente decreciente

### 2.3 Transformaciones

- $f(x) = a^{x+h} \rightarrow$  traslación horizontal  $h$  unidades
- $f(x) = a^x + k \rightarrow$  traslación vertical  $k$  unidades
- $f(x) = c \cdot a^x \rightarrow$  estiramiento vertical por factor  $c$

## ✓ Autoevaluación Módulo 2

1. Calcula:  $2^3 \cdot 2^4$
  2. Simplifica:  $(3^2)^4$
  3. ¿La función  $f(x) = (1/4)^x$  es creciente o decreciente?
- 

## Módulo 3: Gráficas de Funciones Exponenciales

### 3.1 Cómo graficar $f(x) = a^x$

#### Paso 1: Crear tabla de valores

Para  $f(x) = 2^x$ :

x	f(x)
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

#### Paso 2: Marcar puntos y trazar curva

- La curva nunca toca el eje x
- Crece muy rápidamente para x positivos
- Se acerca a 0 para x negativos

### 3.2 Comparación de gráficas

- Bases mayores que 1: curvas que suben hacia la derecha
- Bases entre 0 y 1: curvas que bajan hacia la derecha
- Todas pasan por (0, 1)

## ✓ Autoevaluación Módulo 3

1. Crea una tabla de valores para  $f(x) = 3^x$  con  $x = -2, -1, 0, 1, 2$
  2. ¿Qué punto tienen en común todas las funciones exponenciales?
-

## Módulo 4: Ecuaciones Exponenciales

### 4.1 Método de igualar bases

Si  $a^m = a^n$ , entonces  $m = n$

**Ejemplo 1:**  $2^x = 8$

- $2^x = 2^3$
- $x = 3$

**Ejemplo 2:**  $3^{2x-1} = 27$

- $3^{2x-1} = 3^3$
- $2x - 1 = 3$
- $2x = 4$
- $x = 2$

### 4.2 Uso de logaritmos

Para ecuaciones como  $a^x = b$ , usamos logaritmos:

- $x = \log_a(b)$

**Ejemplo:**  $2^x = 10$

- $x = \log_2(10) \approx 3.32$

### 4.3 Casos especiales

- Si  $a^x = 1$ , entonces  $x = 0$
- Si  $a^x = a$ , entonces  $x = 1$
- Si  $a^x = 1/a$ , entonces  $x = -1$

## Autoevaluación Módulo 4

Resuelve:

1.  $5^x = 125$
  2.  $2^{x+1} = 16$
  3.  $3^x = 10$  (usa calculadora)
-

## Módulo 5: Aplicaciones Prácticas

### 5.1 Crecimiento poblacional

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

- $P_0$ : población inicial
- $r$ : tasa de crecimiento
- $t$ : tiempo

**Ejemplo:** Una población de bacterias se duplica cada 3 horas. Si inicialmente hay 100 bacterias, ¿cuántas habrá después de 9 horas?

- $P(9) = 100 \cdot 2^{9/3} = 100 \cdot 2^3 = 800$  bacterias

### 5.2 Decaimiento radiactivo

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

- $N_0$ : cantidad inicial
- $\lambda$ : constante de decaimiento
- $t$ : tiempo

### 5.3 Interés compuesto

$$A = P(1 + r/n)^{nt}$$

- $A$ : cantidad final
- $P$ : capital inicial
- $r$ : tasa de interés anual
- $n$ : veces que se capitaliza por año
- $t$ : tiempo en años

### 5.4 Crecimiento de inversiones

Un capital de \$1000 se invierte al 5% anual con capitalización continua.  $A = 1000 \cdot e^{0.05t}$

## Autoevaluación Módulo 5

1. Una población crece según  $P(t) = 500 \cdot 2^t$ . ¿Cuál es la población después de 4 unidades de tiempo?
  2. ¿Cuánto dinero tendrás después de 10 años si inviertes \$2000 al 3% anual capitalizado anualmente?
-



## Módulo 6: Logaritmos y Función Inversa

### 6.1 Definición de logaritmo

Si  $a^x = y$ , entonces  $x = \log_a(y)$

El logaritmo es la función inversa de la exponencial.

### 6.2 Propiedades de logaritmos

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$

### 6.3 Logaritmos comunes

- $\log$  (base 10): logaritmo común
- $\ln$  (base e): logaritmo natural
- Cambio de base:  $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$



### Autoevaluación Módulo 6

1. Calcula  $\log_2(8)$
  2. Si  $\log_3(x) = 4$ , ¿cuál es el valor de  $x$ ?
  3. Usa propiedades para simplificar:  $\log(100x)$
- 



## Módulo 7: Ejercicios Integradores

### Nivel Básico

1. Evalúa:  $4^2$ ,  $3^{-1}$ ,  $(1/2)^3$
2. Grafica  $f(x) = 2^x$  y  $g(x) = (1/2)^x$  en el mismo plano
3. Resuelve:  $5^x = 25$

### Nivel Intermedio

4. Resuelve:  $2^{x+1} = 3^x$
5. Una población crece según  $P(t) = 1000 \cdot 1.5^t$ . ¿Cuándo llegará a 3375?
6. Simplifica:  $(2^3 \cdot 2^x) / 2^{x-1}$

## Nivel Avanzado

7. Resuelve el sistema:
    - $2^x \cdot 3^y = 12$
    - $2^{x+1} \cdot 3^{y-1} = 8$
  8. Demuestra que  $f(x) = a^x$  es inyectiva para  $a > 0$ ,  $a \neq 1$
- 

## Evaluación Final

### Test de conocimientos (20 puntos)

1. **Conceptos básicos (4 puntos)**
  - Define función exponencial
  - ¿Por qué es importante?
2. **Cálculos (6 puntos)**
  - Evalúa:  $3^4$ ,  $2^{-3}$ ,  $e^0$
  - Resuelve:  $4^x = 64$
  - Simplifica:  $(5^2)^3 / 5^4$
3. **Gráficas (4 puntos)**
  - Describe las características de  $f(x) = 2^x$
  - ¿Cómo cambia la gráfica si la base es menor que 1?
4. **Aplicaciones (4 puntos)**
  - Un capital se triplica en 5 años con crecimiento exponencial. Escribe la función.
  - Calcula el tiempo para que una población se duplique si crece al 10% anual.
5. **Logaritmos (2 puntos)**
  - Calcula  $\log_5(125)$
  - Si  $2^x = 15$ , expresa  $x$  usando logaritmos.

### Respuestas esperadas

- 18-20 puntos: Excelente dominio
  - 14-17 puntos: Buen dominio, revisar algunos conceptos
  - 10-13 puntos: Dominio básico, necesitas más práctica
  - Menos de 10: Repasa los módulos anteriores
- 

## Recursos Adicionales

Para profundizar:

1. **Khan Academy:** Curso completo de funciones exponenciales
2. **YouTube:** Canal "Profesor Alex" - Funciones exponenciales
3. **Libro:** "Álgebra y Trigonometría" de Stewart
4. **Simuladores online:** Desmos Graphing Calculator

### **Ejercicios extra:**

- Páginas de práctica: MathXL, IXL Math
- Aplicaciones móviles: Photomath, Wolfram Alpha

### **Para aplicaciones:**

- Cursos de finanzas básicas (interés compuesto)
- Biología (crecimiento poblacional)
- Física (decaimiento radiactivo)

---

## **Lista de Verificación de Progreso**

### **Módulo 1: Conceptos Fundamentales**

- ☐ Entiendo qué es una función exponencial
- ☐ Conozco las restricciones de la base
- ☐ Reconozco ejemplos de funciones exponenciales

### **Módulo 2: Propiedades**

- ☐ Domino las leyes de exponentes
- ☐ Entiendo las características gráficas
- ☐ Puedo aplicar transformaciones

### **Módulo 3: Gráficas**

- ☐ Puedo crear tablas de valores
- ☐ Dibujo gráficas correctamente
- ☐ Identifico asíntotas y comportamiento

### **Módulo 4: Ecuaciones**

- ☐ Resuelvo ecuaciones igualando bases
- ☐ Uso logaritmos cuando es necesario
- ☐ Verifico mis soluciones

### **Módulo 5: Aplicaciones**



- ☐ Modelo problemas de crecimiento
- ☐ Trabajo con interés compuesto
- ☐ Interpreto resultados en contexto

### **Módulo 6: Logaritmos**

- ☐ Entiendo la relación inversa
- ☐ Aplico propiedades de logaritmos
- ☐ Cambio entre diferentes bases

### **Módulo 7: Integración**

- ☐ Resuelvo problemas complejos
- ☐ Combino diferentes conceptos
- ☐ Analizo y justifico soluciones

---

## **Conclusión**

¡Felicidades por completar esta guía! Has desarrollado una comprensión sólida de las funciones exponenciales, desde los conceptos básicos hasta aplicaciones avanzadas.

### **Próximos pasos sugeridos:**

1. Practica regularmente con ejercicios variados
2. Explora aplicaciones en tu área de interés
3. Considera estudiar funciones logarítmicas más a fondo
4. Investiga series de Taylor para funciones exponenciales

**Recuerda:** Las matemáticas se aprenden practicando. Mantén la constancia y no dudes en repasar conceptos cuando sea necesario.

---

*Esta guía fue diseñada para el autoaprendizaje progresivo. Tómate el tiempo necesario en cada módulo y asegúrate de dominar los conceptos antes de avanzar.*