

Guía de Autoaprendizaje: Función Exponencial

Introducción y Objetivos

¿Qué aprenderás?

Al completar esta guía serás capaz de:

- Comprender qué es una función exponencial y sus características
- Identificar y graficar funciones exponenciales
- Resolver ecuaciones exponenciales básicas
- Aplicar funciones exponenciales en problemas de la vida real
- Trabajar con logaritmos como función inversa

Tiempo estimado: 8-10 horas de estudio

Módulo 1: Conceptos Fundamentales

1.1 Definición

Una **función exponencial** tiene la forma:

$$f(x) = a^x$$

Donde:

- a es la base ($a > 0$ y $a \neq 1$)
- x es el exponente (variable independiente)

1.2 Ejemplos básicos

- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = 3^x$
- $f(x) = (1/2)^x$
- $f(x) = 10^x$

1.3 La función exponencial natural

La más importante es $f(x) = e^x$, donde $e \approx 2.718281828...$

✓ Autoevaluación Módulo 1

1. ¿Cuáles de estas son funciones exponenciales?
 - a) $f(x) = x^2$
 - b) $f(x) = 2^x$
 - c) $f(x) = x^3$
 - d) $f(x) = (1/3)^x$
 2. ¿Por qué la base no puede ser 1 o negativa?
-

☑ Módulo 2: Propiedades y Características

2.1 Propiedades de los exponentes

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m / a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$ (para $a \neq 0$)
- $a^{-n} = 1/a^n$

2.2 Características de $f(x) = a^x$

Cuando $a > 1$ (función creciente):

- Dominio: todos los números reales $(-\infty, +\infty)$
- Rango: números reales positivos $(0, +\infty)$
- Pasa por el punto $(0, 1)$
- Tiene asíntota horizontal en $y = 0$
- Es estrictamente creciente

Cuando $0 < a < 1$ (función decreciente):

- Dominio: todos los números reales $(-\infty, +\infty)$
- Rango: números reales positivos $(0, +\infty)$
- Pasa por el punto $(0, 1)$
- Tiene asíntota horizontal en $y = 0$
- Es estrictamente decreciente

2.3 Transformaciones

- $f(x) = a^{x+h} \rightarrow$ traslación horizontal h unidades
- $f(x) = a^x + k \rightarrow$ traslación vertical k unidades
- $f(x) = c \cdot a^x \rightarrow$ estiramiento vertical por factor c

✓ Autoevaluación Módulo 2

1. Calcula: $2^3 \cdot 2^4$
 2. Simplifica: $(3^2)^4$
 3. ¿La función $f(x) = (1/4)^x$ es creciente o decreciente?
-

Módulo 3: Gráficas de Funciones Exponenciales

3.1 Cómo graficar $f(x) = a^x$

Paso 1: Crear tabla de valores

Para $f(x) = 2^x$:

x	f(x)
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

Paso 2: Marcar puntos y trazar curva

- La curva nunca toca el eje x
- Crece muy rápidamente para x positivos
- Se acerca a 0 para x negativos

3.2 Comparación de gráficas

- Bases mayores que 1: curvas que suben hacia la derecha
- Bases entre 0 y 1: curvas que bajan hacia la derecha
- Todas pasan por (0, 1)

✓ Autoevaluación Módulo 3

1. Crea una tabla de valores para $f(x) = 3^x$ con $x = -2, -1, 0, 1, 2$
 2. ¿Qué punto tienen en común todas las funciones exponenciales?
-

Módulo 4: Ecuaciones Exponenciales

4.1 Método de igualar bases

Si $a^m = a^n$, entonces $m = n$

Ejemplo 1: $2^x = 8$

- $2^x = 2^3$
- $x = 3$

Ejemplo 2: $3^{2x-1} = 27$

- $3^{2x-1} = 3^3$
- $2x - 1 = 3$
- $2x = 4$
- $x = 2$

4.2 Uso de logaritmos

Para ecuaciones como $a^x = b$, usamos logaritmos:

- $x = \log_a(b)$

Ejemplo: $2^x = 10$

- $x = \log_2(10) \approx 3.32$

4.3 Casos especiales

- Si $a^x = 1$, entonces $x = 0$
- Si $a^x = a$, entonces $x = 1$
- Si $a^x = 1/a$, entonces $x = -1$

Autoevaluación Módulo 4

Resuelve:

1. $5^x = 125$
 2. $2^{x+1} = 16$
 3. $3^x = 10$ (usa calculadora)
-

Módulo 5: Aplicaciones Prácticas

5.1 Crecimiento poblacional

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

- P_0 : población inicial
- r : tasa de crecimiento
- t : tiempo

Ejemplo: Una población de bacterias se duplica cada 3 horas. Si inicialmente hay 100 bacterias, ¿cuántas habrá después de 9 horas?

- $P(9) = 100 \cdot 2^{9/3} = 100 \cdot 2^3 = 800$ bacterias

5.2 Decaimiento radiactivo

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

- N_0 : cantidad inicial
- λ : constante de decaimiento
- t : tiempo

5.3 Interés compuesto

$$A = P(1 + r/n)^{nt}$$

- A : cantidad final
- P : capital inicial
- r : tasa de interés anual
- n : veces que se capitaliza por año
- t : tiempo en años

5.4 Crecimiento de inversiones

Un capital de \$1000 se invierte al 5% anual con capitalización continua. $A = 1000 \cdot e^{0.05t}$

Autoevaluación Módulo 5

1. Una población crece según $P(t) = 500 \cdot 2^t$. ¿Cuál es la población después de 4 unidades de tiempo?
 2. ¿Cuánto dinero tendrás después de 10 años si inviertes \$2000 al 3% anual capitalizado anualmente?
-

Módulo 6: Logaritmos y Función Inversa

6.1 Definición de logaritmo

Si $a^x = y$, entonces $x = \log_a(y)$

El logaritmo es la función inversa de la exponencial.

6.2 Propiedades de logaritmos

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$

6.3 Logaritmos comunes

- \log (base 10): logaritmo común
- \ln (base e): logaritmo natural
- Cambio de base: $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$

Autoevaluación Módulo 6

1. Calcula $\log_2(8)$
 2. Si $\log_3(x) = 4$, ¿cuál es el valor de x ?
 3. Usa propiedades para simplificar: $\log(100x)$
-

Módulo 7: Ejercicios Integradores

Nivel Básico

1. Evalúa: 4^2 , 3^{-1} , $(1/2)^3$
2. Grafica $f(x) = 2^x$ y $g(x) = (1/2)^x$ en el mismo plano
3. Resuelve: $5^x = 25$

Nivel Intermedio

4. Resuelve: $2^{x+1} = 3^x$
5. Una población crece según $P(t) = 1000 \cdot 1.5^t$. ¿Cuándo llegará a 3375?
6. Simplifica: $(2^3 \cdot 2^x) / 2^{x-1}$

Nivel Avanzado

7. Resuelve el sistema:
 - $2^x \cdot 3^y = 12$
 - $2^{x+1} \cdot 3^{y-1} = 8$
 8. Demuestra que $f(x) = a^x$ es inyectiva para $a > 0$, $a \neq 1$
-

Evaluación Final

Test de conocimientos (20 puntos)

1. **Conceptos básicos (4 puntos)**
 - Define función exponencial
 - ¿Por qué es importante?
2. **Cálculos (6 puntos)**
 - Evalúa: 3^4 , 2^{-3} , e^0
 - Resuelve: $4^x = 64$
 - Simplifica: $(5^2)^3 / 5^4$
3. **Gráficas (4 puntos)**
 - Describe las características de $f(x) = 2^x$
 - ¿Cómo cambia la gráfica si la base es menor que 1?
4. **Aplicaciones (4 puntos)**
 - Un capital se triplica en 5 años con crecimiento exponencial. Escribe la función.
 - Calcula el tiempo para que una población se duplique si crece al 10% anual.
5. **Logaritmos (2 puntos)**
 - Calcula $\log_5(125)$
 - Si $2^x = 15$, expresa x usando logaritmos.

Respuestas esperadas

- 18-20 puntos: Excelente dominio
 - 14-17 puntos: Buen dominio, revisar algunos conceptos
 - 10-13 puntos: Dominio básico, necesitas más práctica
 - Menos de 10: Repasa los módulos anteriores
-

Recursos Adicionales

Para profundizar:

1. **Khan Academy:** Curso completo de funciones exponenciales
2. **YouTube:** Canal "Profesor Alex" - Funciones exponenciales
3. **Libro:** "Álgebra y Trigonometría" de Stewart
4. **Simuladores online:** Desmos Graphing Calculator

Ejercicios extra:

- Páginas de práctica: MathXL, IXL Math
- Aplicaciones móviles: Photomath, Wolfram Alpha

Para aplicaciones:

- Cursos de finanzas básicas (interés compuesto)
- Biología (crecimiento poblacional)
- Física (decaimiento radiactivo)

Lista de Verificación de Progreso

Módulo 1: Conceptos Fundamentales

- Entiendo qué es una función exponencial
- Conozco las restricciones de la base
- Reconozco ejemplos de funciones exponenciales

Módulo 2: Propiedades

- Domino las leyes de exponentes
- Entiendo las características gráficas
- Puedo aplicar transformaciones

Módulo 3: Gráficas

- Puedo crear tablas de valores
- Dibujo gráficas correctamente
- Identifico asíntotas y comportamiento

Módulo 4: Ecuaciones

- Resuelvo ecuaciones igualando bases
- Uso logaritmos cuando es necesario
- Verifico mis soluciones

Módulo 5: Aplicaciones

- Modelo problemas de crecimiento
- Trabajo con interés compuesto
- Interpreto resultados en contexto

Módulo 6: Logaritmos

- Entiendo la relación inversa
- Aplico propiedades de logaritmos
- Cambio entre diferentes bases

Módulo 7: Integración

- Resuelvo problemas complejos
- Combino diferentes conceptos
- Analizo y justifico soluciones

Conclusión

¡Felicidades por completar esta guía! Has desarrollado una comprensión sólida de las funciones exponenciales, desde los conceptos básicos hasta aplicaciones avanzadas.

Próximos pasos sugeridos:

1. Practica regularmente con ejercicios variados
2. Explora aplicaciones en tu área de interés
3. Considera estudiar funciones logarítmicas más a fondo
4. Investiga series de Taylor para funciones exponenciales

Recuerda: Las matemáticas se aprenden practicando. Mantén la constancia y no dudes en repasar conceptos cuando sea necesario.

Esta guía fue diseñada para el autoaprendizaje progresivo. Tómame el tiempo necesario en cada módulo y asegúrate de dominar los conceptos antes de avanzar.